第43卷　第4期　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　Vol.43,No.4
2024年12月　Journal of Xinjiang Normal University　Dec. 2024
(Natural Sciences Edition)

Hilfer-Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程解的存在唯一性

帕力旦·吾斯曼,顾海波*
(新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要: 文章研究了具有非局部条件的Hilfer-Katugampola型隐式分数阶模糊问题。通过使用Schauder不动点定理和Banach压缩映射原理,给出了问题解的存在唯一性条件。

关键词: 模糊微分方程;Hilfer-Katugampola分数阶导数;不动点定理;解的存在唯一性

中图分类号: O175.6　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1008-9659(2024)04-0053-09

分数阶微积分是一门历史悠久的研究课题。如今,分数阶微分方程的概念在数学领域越来越受到关注[1-3],已应用于许多科学领域,如自动控制理论、随机过程、异常扩散等。尽管分数阶微分方程的应用相当广泛,但它不能适用于所有系统。近年来,模糊分数阶微积分和模糊分数阶微分方程已成为重要的课题,因为它们不仅为描述各种类型的材料和运动过程中的记忆和遗传特性提供了有价值的工具,而且还可以描述物理、化学、生物、经济学以及工程系统等领域的不确定性、模糊性、不完整信息[4-6]。由于这些原因,模糊分数阶积分和模糊分数阶微分作为一种新的数学方法应运而生[7-9]。除此之外,隐式分数阶模糊微分方程初值问题也引起了学者的关注[10-11]。

2019年,Van等人[10]运用Banach不动点定理研究了如下隐式分数阶模糊微分方程初值问题

$$^{*}D_{a^{+}}^{\alpha}u(t)=f\left(t,u(t),{}^{*}D_{a^{+}}^{\alpha}u(t)\right)$$

解的存在唯一性,其中$\alpha\in(0,1)$,$0<a<t\leqslant b$,$^{*}D_{a^{+}}^{\alpha}u(t)$(Caputo型、Riemann-Liouville型、Hadamrd型)是模糊分数阶导数,$f:[a,b]\times E\times E\rightarrow E$是连续模糊函数。

2020年,Chen等人[12]利用逐次逼近法研究了下列模糊Hilfer-Katugampola分数阶微分方程在非局部条件下解的存在唯一性

$$\begin{cases}\left({}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha,\beta}x\right)(t)=f\left(t,x(t)\right), & t\in J=[a,b]\\ \left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\gamma}x\right)(a)=x_0=\sum\limits_{i=1}^{m}C_i x(t_i), & \gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)\end{cases}$$

其中${}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\gamma}$,${}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha,\beta}$是Hilfer-Katugampola型分数阶积分和导数,$x\in R$,$0<\alpha<1$,$0\leqslant\beta\leqslant1$,$\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$且$\rho>0$,$f:[a,b]\times E\rightarrow E$是模糊函数,$t_i(i=1,\cdots,m)$满足$a<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_m<b$且$c$为实数,$x_0\in R$,$E$是$R$上的模糊数空间。

[收稿日期]2023-12-15　[修回日期]2024-01-20
[基金项目]国家自然科学基金项目(11961069);新疆优秀青年科技人才培训计划项目(2019Q022);新疆师范大学青年拔尖人才项目(XJNUQB2022-14)。
[作者简介]帕力旦·吾斯曼(1998-),女,硕士研究生,主要从事微分方程理论及数值模拟方面研究,E-mail:prd0614@163.com.
*[通讯作者]顾海波(1982-),男,教授,主要从事微分方程理论及数值模拟方面研究,E-mail:hbgu_math@163.com.

2022年,席艳丽等人[11]运用幂压缩映射原理,研究了下列Caputo−Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程初值问题

$$\begin{cases} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha,p}u(t)=f\left(t,u(t),{}^{C}D_{a^+}^{\alpha,p}u(t)\right) \\ u(a)=u_0 \end{cases}$$

解的唯一性,其中$\alpha\in(0,1),0<a<t\leqslant b,p>0$是给定的实数,${}^{C}D_{a^+}^{\alpha,p}$是模糊Caputo−Katugampola分数阶广义Hukuhara导数,$f:[a,b]\times E\times E\rightarrow E$是一个模糊函数,$E$是模糊数空间。

虽然现有的关于分数阶模糊微分方程初值问题的研究相当广泛,但对于隐式分数阶模糊微分方程解的研究结果较少。考虑如下Hilfer−Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程非局部问题

$$\begin{cases} {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(t)=f\left(t,u(t),{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(t)\right), & t\in(a,b] \\ {}^{\rho}I_{a^+}^{1-\gamma}u(a)=\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i), & \gamma=\alpha+\beta(1-\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

其中$u:[a,b]\rightarrow E,\rho>0,\alpha\in(0,1),\beta\in[0,1]$,${}^{\rho}I_{a^+}^{1-\gamma}$,${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}$是Hilfer−Katugampola型模糊分数阶积分和导数,$f:[a,b]\times E\times E\rightarrow E$是连续模糊函数,$t_i(i=1,\cdots,m)$满足$a<t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_m<b$且$c$为实数,$E$是$R$上的模糊数空间。

文章的目标是在非局部条件下构造Hilfer−Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程的等价积分形式,并利用Schauder不动点定理和Banach压缩映射原理,证明解的存在唯一性。

1 预备知识

用E表示R上所有模糊数的空间。

设$c\in R,1\leqslant p\leqslant\infty$,令$X_c^p(a,b)$表示所有在区间$[a,b]$上复值Lebesgue可测函数$f$的空间,其中

$$\|f\|_{X_c^p}<\infty$$

且其范数可表示为

$$\|f\|_{X_c^p}=\left(\int_{t_0}^{T}\left|t^cf(t)\right|^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

定义1[13] 设$E=\{u|u:R\rightarrow[0,1]\}$为$R$上所有模糊数空间,即满足:

(1)u是正规的模糊集,即$\exists t_0\in R$,使得$u(t_0)=1$;

(2)u在R上是上半连续的,即对$\forall t_0\in R$,有$u(t_0)\geqslant\lim\limits_{t\rightarrow t_0^+}u(t)$;

(3)u是凸的,即对$\forall t_1,t_2\in R,\lambda\in(0,1)$,有$u(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\geqslant\min\{u(t_1),u(t_2)\}$;

(4)$[u]^0=suppu=\overline{\{t\in R|u(t)>0\}}$是紧的。

定义2[14] 对于$r\in(0,1]$,定义u的r−水平集为

$$[u]^r=\{t\in R|u(t)\geqslant r\}:=[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]$$

其中$\underline{u},\overline{u}$分别表示模糊集$u\in E$的上分支和下分支。$u$的$r$−水平集的直径定义为$d\left([u]^r\right)=\overline{u}(r)-\underline{u}(r)$.

定义3[15] 距离$D_0[u_1,u_2]$定义为

$$D_0[u_1,u_2]=\sup_{0\leqslant r\leqslant 1}H\left([u_1]^r,[u_2]^r\right),\quad\forall u_1,u_2\in E$$

其中$H\left([u_1]^r,[u_2]^r\right)=\max\left\{\left|\underline{u}_1(r)-\underline{u}_2(r)\right|,\left|\overline{u}_1(r)-\overline{u}_2(r)\right|\right\}$是$[u_1]^r$和$[u_2]^r$之间的距离,$D_0$是Hausdorff度量。$E$具有上述定义的一个完备度量空间(参见文献[16])。E中的范数定义为:$\|u\|=D_0\left[u,\hat{0}\right]$和$\|u_1-u_2\|=D_0[u_1,u_2],\forall u,u_1,u_2\in E$.

定义4[15-16] 将E中的求和和标量乘法定义为

$$\left[u_1+u_2\right]^r=\left[u_1\right]^r+\left[u_2\right]^r=\left\{x_1+x_2|x_1\in\left[u_1\right]^r,x_2\in\left[u_2\right]^r\right\}$$

$$\left[k\cdot u_1\right]^r=k\left[u_1\right]^r=\left\{kx|x\in\left[u\right]^r\right\},\forall r\in[0,1]$$

如果$u_1,u_2,u_3,u_4,u\in E,k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0,k\in R$，那么

(1)$u_1+\left(u_2+u_3\right)=\left(u_1+u_2\right)+u_3,\left(k_1+k_2\right)u_1=k_1u_1+k_2u_1,k\left(u_1+u_2\right)=ku_1+ku_2$；

(2)$D_0\left[u_1+u_3,u_2+u_3\right]=D_0\left[u_1,u_2\right]$, $D_0\left[u_1,u_3\right]\leqslant D_0\left[u_1,u_2\right]+D_0\left[u_2,u_3\right]$, $D_0\left[u_1+u_2,u_3+u_4\right]\leqslant D_0\left[u_1,u_3\right]+D_0\left[u_2,u_4\right]$;

(3)$D_0\left[u_1+u_2,\hat{0}\right]\leqslant D_0\left[u_1,\hat{0}\right]+D_0\left[u_2,\hat{0}\right],D_0[ku_1,ku_2]=|k|D_0[u_1,u_2]$;

(4)$D_0\left[k_1u,k_2u\right]=|k_1-k_2|D_0\left[u,\hat{0}\right]$.

其中$\hat{0}\in E$.

定义5[17]**(Hukuhara差分)** 设$u_1,u_2\in E$，若$\exists u_3\in E$，使得$u_1=u_2+u_3$，则称u_3为u_1和u_2的Hukuhara差分，记为$u_1\ominus u_2$.

注1 $u_1\ominus u_2\neq u_1+(-1)u_2$.

注2 当$\lambda_1,\lambda_2\in R^+$且$u\in E$，如果$\lambda_1>\lambda_2$，则$\lambda_1u\ominus\lambda_2u=\left(\lambda_1-\lambda_2\right)u$.

引理1[18] $\forall u_1,u_2,u_3\in E$，有

$$D_0\left[u_1\ominus(-1)u_2,\hat{0}\right]\leqslant D_0\left[u_1,\hat{0}\right]+D_0\left[u_2,\hat{0}\right]$$

$$D_0\left[u_1\ominus(-1)u_2,u_1\ominus(-1)u_3\right]=D_0\left[u_2,u_3\right]$$

定义6[19]**(广义Hukuhara差分)** 两个模糊数$u_1,u_2\in E$的广义Hukuhara差分(简称gH差分)定义如下

$$u_1\ominus_{gH}u_2=u_3\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathrm{i})\qquad u_1=u_2+u_3\\(\mathrm{ii})\,u_2=u_1+(-1)u_3\end{cases}$$

定义7[20] 令模糊函数$u:[a,b]\rightarrow E$，如果函数$t\mapsto d\left(\left[u(t)\right]^r\right)$在$[a,b]$上不减的(或不增的)，则$u$在$[a,b]$上是$d$-递增的(或$d$-递减的)，如果$u$在$[a,b]$上是$d$-递增的或$d$-递减的，则$u$在$[a,b]$上是$d$-单调。

定义8[20] 模糊函数u在t_0处的广义Hukuhara导数定义如下

$$u'_{gH}\left(t_0\right)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{u\left(t_0+h\right)\ominus_{gH}u\left(t_0\right)}{h}$$

如果$u'_{gH}(t_0)\in E$，称模糊数u在t_0处是广义Hukuhara可微(gH-可微)。记$C\left([a,b],E\right)$为从$[a,b]$到E的所有连续模糊函数的空间，其赋予度量：$D_{[a,b]}\left[u,\hat{0}\right]=\sup\limits_{t\in[a,b]}D_0\left[u(t),\hat{0}\right]$，$AC\left([a,b],E\right)$为区间$[a,b]$上所有绝对连续模糊函数的集合，其值在$E$中，$L\left([a,b],E\right)$是使得函数$t\mapsto D_0\left[u(t),\hat{0}\right]$属于$L^1[a,b]$的所有模糊函数$u:[a,b]\rightarrow E$构成的集合。令$\gamma\in(0,1)$，记$C_{1-\gamma}[a,b]$表示由$C_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)=\left\{f:(a,b\rightarrow E:\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}f(t)\in C\left([a,b],E\right)\right\}$定义的连续函数空间，其距离为$D^{1-\gamma}_{[a,b]}\left[u,\hat{0}\right]=\sup\limits_{t\in[a,b]}D_0\left[\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}u(t),\hat{0}\right]$.

定义9[8] 令$-\infty<a<t<\infty$，则Katugampola分数阶积分定义为

$$\left({}^\rho I_{a^+}^\alpha u\right)(t)=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}u(s)ds$$

其中$\alpha>0,\rho>0,u\in X_c^p(a,b)$.

定义10[21] 令$0\leqslant a<t<\infty,n=[\alpha]+1$，则Katugampola分数阶导数定义为

$$({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u)(t)=\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n}({}^{\rho}I_{a^+}^{n-\alpha}u)(t)=\frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{\alpha-n+1}}u(s)ds$$

令$u\in L\big([a,b],E\big)$,则α阶模糊Katugampola分数阶积分定义为

$$({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}u)(t)=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{1-\alpha}}u(s)ds,\quad t\geqslant a$$

定义11[12] 令α和β满足$n-1<\alpha\leqslant n,0\leqslant\beta\leqslant1,n\in N$. 如果对于$t\in[a,b]$,gH−导数$u'_{(1-\alpha),\rho}(t)$存在,则关于模糊函数$u\in C_{1-\gamma}\big[[a,b],E\big]$的模糊Hilfer−Katugampola广义Hukuhara分数阶导数(Hilfer−Katugampola gH−分数阶导数)定义为

$$({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u)(t)=\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\left(s^{\rho-1}\frac{d}{ds}\right){}^{\rho}I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}u\right)(t)=\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\delta_{\rho}\,{}^{\rho}I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}u\right)(t)$$

其中 $\delta_{\rho}=\left(s^{\rho-1}\dfrac{d}{ds}\right),u_{(1-\alpha),\rho}(t)={}^{\rho}I_{a^+}^{(1-\alpha)}u(t),t\geqslant a,\rho>0.$

引理2[12] 如果$u\in AC\big((a,b],E\big)$是d−单调模糊函数,$t\in(a,b],\alpha\in(0,1)$,设$u_{(1-\alpha),\rho}(t)={}^{\rho}I_{a^+}^{(1-\alpha)}u(t)$在$(a,b]$上$d$−递增的,则

$$\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\,{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u\right)(t)=u(t)\ominus_{gH}\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

$$({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}\,{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}u)(t)=u(t)$$

引理3[1]**(Schauder不动点定理)**设B为Banach空间,S为B的闭凸子集,如果 $T{:}S\to S$是一个映射,使得集合$\{Tx{:}x\in S\}$在B中是相对紧的,则T至少有一个不动点$x^*\in S$,使得$Tx^*=x^*$.

引理4[1]**(Banach压缩映射原理)** 设(B,d)是一个完备的度量空间,$T{:}B\to B$为压缩映射,则T在B中存在唯一的不动点,即$Tx=x$.

2 存在唯一性

在本节中,研究问题(1)解的存在唯一性,为此需要引入下列引理和假设。

首先基于引理2,得到如下引理。

引理5 令$\gamma=\alpha+\beta(1-\alpha)$,其中$0<\alpha<1,0\leqslant\beta\leqslant1$,且$\rho>0$,对$\forall u\in E$令$f{:}(a,b]\times E\to E$是一个模糊函数使得$t\mapsto f(t,u)$属于$C_{1-\gamma}\big([a,b],E\big)$.设$d$−单调模糊函数$u\in C\big((a,b],E\big)$是问题(1)的解并且模糊函数$t\mapsto{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\gamma}f\big(t,u(t),{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(t)\big)$在$(a,b]$上$d$−递增,则式(1)等价于

$$u(t)\ominus_{gH}\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}=\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{1-\alpha}}f\big(s,u(s),{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\big)ds,\quad t\in[a,b] \tag{2}$$

注3 引理5的证明类似于文献[12]中引理3.1的证明。

注4 根据文献[22]中第三部分的结果可以得到

(i)如果函数$u\in C\big((a,b],E\big)$在$[a,b]$上$\forall r\in[0,1]$是d−递增的,则式(2)等价于

$$u(t)=\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{1-\alpha}}f\big(s,u(s),{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\big)ds,t\in[a,b]$$

(ii)如果函数$u\in C\big((a,b],E\big)$在$[a,b]$上$\forall r\in[0,1]$是d−递减的,则式(2)等价于

$$u(t)=\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}\ominus(-1)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\ ,t\in[a,b]$$

下面，研究问题(1)在第(i)种情况下的解的存在唯一性，第(ii)中情况的证明与前一种情况完全相似，故不再赘述。

进一步记 $BC\left([a,b],E\right)$ 表示从 $[a,b]$ 到 E 的所有有界连续函数构成的空间，$BC_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 表示由 $C_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 定义的所有有界连续函数构成的空间。$B(u_0,r)=\left\{v\in E|D^{1-\gamma}[v,u_0]\leqslant r\right\}$. 设 $f:[a,b]\times E\times E\to E$，有下列假设：

(H1)对于 $z,\omega\in BC\left([a,b],E\right),t\in[a,b]$，函数 $z:\mapsto f(t,z,\omega)$ 和 $\omega:\mapsto f(t,z,\omega)$ 在 $BC\left([a,b],E\right)$ 上连续；

(H2)存在一个常数 $M>0$ 使得 $\forall t\in[a,b]$ 和 $\forall z,\omega\in E,D_0\left[f(t,z,\omega),\hat{0}\right]\leqslant M$；

(H3)存在连续实值函数 $g:[a,b]\to R^+$ 和常数 $L\in(0,1)$，使得对 $\forall t\in[a,b]$ 和 $\forall z_1,z_2,\omega_1,\ \omega_2\in E$ 有 $D_0\left[f(t,z_1,\omega_1),f(t,z_2,\omega_2)\right]\leqslant g(t)D_0[z_1,z_2]+LD_0[\omega_1,\omega_2]$.

定理1(存在性) 若假设条件(H1)(H2)成立，且 $\frac{\sum_{i=1}^{m}C_i}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}<1$，则问题(1)在 $C_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 中至少有一个解。

证明 首先定义映射 $F:BC_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)\to BC_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 如下

$$(Fu)(t)=\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds,t\in[a,b]$$

由引理5可知，问题(1)至少有一个解 u 当且仅当 $u\in C_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 满足 $(Fu)(t)$. 因此如果 F 在 $C_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 中有一个不动点，那么问题(1)至少有一个解。

令 $B_r=B\left(\hat{0},r\right)=\left\{v\in BC_{1-\gamma}\left([a,b],E\right):D^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[v,\hat{0}\right]\leqslant r\right\}$，显然 B_r 是 $BC_{1-\gamma}\left([a,b],E\right)$ 中的一个有界闭凸集，由(H1)及(H2)，对 $\forall u\in B_r,Fu$ 在 $[a,b]$ 上连续且有

$$\begin{aligned}
D_0\left[\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu)(t),\hat{0}\right]&=D_0\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds,\hat{0}\right]\\
&\leqslant D_0\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)},\hat{0}\right]+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}D_0\left[f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right),\hat{0}\right]ds\\
&\leqslant D_0\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)},\hat{0}\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha}\\
&\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m}C_i}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}D^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[u,\hat{0}\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha}\\
&\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m}C_i}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}r+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha}<r
\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\Gamma(\gamma)}\left(\dfrac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} < 1$,一定存在常数 r 满足上述不等式,由此说明 $F(B_r)\subset B_r$,即 F 将 B_r 映射到其自身。接下来,由Schauder不动点定理来证明解的存在性。

第一步 证明映射 F 是连续的。

令 $\{u_n\}$ 是一个序列,使得在 B_r 中 $u_n \to u$.那么根据(H1)(H2),$\forall t\in[a,b]$,有

$$D_0\left[f\left(s,u_n(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u_n(s)\right),f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)\right]\leqslant D_0\left[f\left(s,u_n(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u_n(s)\right),\hat{0}\right]+D_0\left[\hat{0},f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)\right]\leqslant 2M \tag{3}$$

和

$$D_0\left[\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu_n)(t),\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu)(t)\right]$$

$$=D_0\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu_n(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{(t^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u_n(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u_n(s)\right)ds\right.$$

$$\left.\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{(t^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right]$$

$$\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m}C_i}{\Gamma(\gamma)}D_0\left[u_n(t_i),u(t_i)\right]+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{(t^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}D_0\left[f\left(s,u_n(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u_n(s)\right),f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)\right]ds$$

由于当 $n\to\infty$ 时 $u_n\to u$,f 连续且式(3)成立,根据Lebesgue控制收敛定理可知,当 $n\to\infty$ 时 $D^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[Fu_n,Fu\right]\to 0$,因此 F 在 B_r 中是连续的。

第二步 证明 $F(B_r)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续。

由于 $F(B_r)\subset B_r$ 且 B_r 有界,因此可以得出 $F(B_r)$ 是一致有界的。另外,令 $t_1,t_2\in[a,b]$,$u\in B_r$,有

$$D_0\left[\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu)(t_1),\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu)(t_2)\right]$$

$$=D_0\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{(t_1{}^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right.$$

$$\left.\frac{\sum_{i=1}^{m}C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}\frac{s^{\rho-1}}{(t_2{}^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right]$$

$$=D_0\left[\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{(t_1{}^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right.$$

$$\left.\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}\frac{s^{\rho-1}}{(t_2{}^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right]$$

$$=D_0\left[\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{(t_1{}^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\right.$$

$$\left(\frac{t_2^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds+\left(\frac{t_2^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_2^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\Bigg]$$

$$\leqslant D_0\Bigg[\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_1{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds$$

$$\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_2{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds\Bigg]$$

$$+D_0\left[\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_2{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds,\hat{0}\right]$$

$$\leqslant\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}s^{\rho-1}\left|\left(\frac{t_1{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{1}{\left(t_1{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}-\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{1}{\left(t_2{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}\right|D_0\left[f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right),\hat{0}\right]ds$$

$$+\left(\frac{t_2{}^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{s^{\rho-1}}{\left(t_2{}^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}D_0\left[f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right),\hat{0}\right]ds$$

$$\leqslant\frac{2M\rho^{-\alpha}\left(t_2{}^\rho-t_1{}^\rho\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}$$

上述不等式的右侧与$u(t)\in B_r$无关,并且当$t_1\to t_2$时,趋近于0,所以$F(B_r)$是等度连续的。综上所述,由Arzela-Ascoli定理可以得出$F(B_r)$是相对紧的。那么根据Schauder不动点定理可以得出F至少有一个不动点,它是问题(1)的解。

定理2(唯一性) 若假设条件(H1)~(H3)成立,$k=\dfrac{\sum_{i=1}^m C_i}{\Gamma(\gamma)}\left(\dfrac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}+\dfrac{G\rho^{-\alpha}\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)}<1$,则问题(1)存在唯一的解,其中$G=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}g(t)$.

证明 假设映射$F:BC_{1-\gamma}([a,b],E)\to BC_{1-\gamma}([a,b],E)$,由定理1可知$F$至少有一个不动点,它是问题(1)的解。令$u,v\in BC_{1-\gamma}([a,b],E)$,由(H3)对$\forall t\in[a,b]$和$z,\omega\in BC([a,b],E)$有

$$\begin{aligned}D_0\left[{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}z(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\omega(t)\right]&=D_0\left[f\left(t,z(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}z(t)\right),f\left(\omega,\omega(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\omega(t)\right)\right]\\&\leqslant g(t)D_0\left[z(t),\omega(t)\right]+LD_0\left[{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}z(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\omega(t)\right]\end{aligned}\tag{4}$$

由式(4)可知

$$D_0\left[{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}z(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}\omega(t)\right]\leqslant\frac{g(t)}{1-L}D_0\left[z(t),\omega(t)\right]\tag{5}$$

那么由(H3)和式(5)可得

$$D_0\left[\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fu)(t),\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Fv)(t)\right]$$

$$=D_0\Bigg[\frac{\sum_{i=1}^m C_iu(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(s)\right)ds,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m C_iv(t_i)}{\Gamma(\gamma)}+\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho-s^\rho\right)^{1-\alpha}}f\left(s,v(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}v(s)\right)ds\Bigg]$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\Gamma(\gamma)} D_0\left[u(t_i),v(t_i)\right] + \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{s^{\rho-1}}{\left(t^\rho - s^\rho\right)^{1-\alpha}} D_0\left[f\left(s,u(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta} u(s)\right), f\left(s,v(s),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta} v(s)\right)\right] ds$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\Gamma(\gamma)} D_0\left[u(t_i),v(t_i)\right] + \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \frac{\rho^{-\alpha}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(g(t) D_0\left[\left(u(t),v(t)\right)\right] + L D_0\left[{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta} u(t), {}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta} v(t)\right]\right)$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\Gamma(\gamma)} D_0\left[u(t_i),v(t_i)\right] + \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \frac{\rho^{-\alpha}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(g(t) D_0\left[\left(u(t),v(t)\right)\right] + L \frac{g(t)}{1-L} D_0\left[u(t),v(t)\right]\right)$$

$$\leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} C_i}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{G\rho^{-\alpha}\left(b^\rho - a^\rho\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)(1-L)}\right) D^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[u,v\right]$$

即$D^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[Fu,Fv\right] \leqslant kD^{1-\gamma}{}_{[a,b]}\left[u,v\right]$.由于$k<1$,可得出$F$是压缩映射。因此由引理4可知映射$F$存在唯一的不动点$u$,此不动点即为问题(1)在区间$[a,b]$上的唯一解。

3 案例

在本节中,将通过以下案例来说明主要结果,考虑模糊问题

$$\begin{cases} {}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}} u(t) = t + 10^{-2}\left(\log_{10} t\right) u(t) + \frac{1}{2}\, {}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}} u(t), & t \in (2,3] \\ {}^{\frac{1}{2}}I_{2^+}^{\frac{1}{3}} u(2) = \frac{1}{3} u\left(\frac{5}{2}\right), & \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha) \end{cases} \tag{6}$$

其中$\alpha=\frac{1}{3}$,$\beta=\frac{1}{2}$,$\gamma=\frac{2}{3}$,$\rho=\frac{1}{2}$,$a=2$,$b=3$,$u:[2,3]\to E$,$f\left(t,u(t),{}^\rho D_{a^+}^{\alpha,\beta}u(t)\right) = t + 10^{-2}\left(\log_{10} t\right)u(t) + \frac{1}{2}\,{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}u(t)$.显然$f$满足假设(H1)和(H2)。对所有的$u,v\in E$和$t\in[2,3]$有

$$\begin{aligned} & D_0\left[f\left(t,u(t),{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}u(t)\right), f\left(t,v(t),{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}v(t)\right)\right] \\ & = D_0\left[t + 10^{-2}\left(\log_{10} t\right)u(t) + \frac{1}{2}\,{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}u(t),\ t + 10^{-2}\left(\log_{10} t\right)v(t) + \frac{1}{2}\,{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}v(t)\right] \\ & \leqslant 10^{-2}\left(\log_{10} t\right) D_0\left[u(t),v(t)\right] + \frac{1}{2} D_0\left[{}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}u(t),\ {}^{\frac{1}{2}}D_{2^+}^{\frac{1}{3},\frac{1}{2}}v(t)\right] \end{aligned}$$

令$g(t)=10^{-2}\log_{10} t$,$L=\frac{1}{2}$,则f满足假设(H3).另外,通过计算可得$k\approx 0.2886<1$,由定理2,问题(6)存在唯一解。

4 结论

文章主要研究了Hilfer-Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程非局部问题解的存在唯一性。此外,还得到了Hilfer-Katugampola型隐式分数阶模糊微分方程的等价积分形式。一般来说,求得大多数模糊分数阶微分方程的解析解并不容易。因此,未来发展一些可靠、有效的技术来求解Hilfer-Katugampola分数阶导数下的隐式分数阶模糊微分方程至关重要。

参考文献:

[1] ZHOU Y.Basic Theory of Fractional Differential Equations[M].Singapore:World Scientific,2023.
[2] 杨尊凯,顾海波,马丽娜.具有测度积分边界条件的分数阶微分方程[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2021,40(01):

40-48.
[3] 陈奕如,顾海波,马丽娜.一类带有Katugampola分数阶积分边值条件的Hadamard型分数阶微分方程的边值问题[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2020,39(01):17-22,38.
[4] BALEANU D,DIETHELM K,SCALAS E,et al.Fractional Calculus:Models and Numerical Methods [M].Singapore:World Scientific,2012.
[5] KILBAS A A,SRIVASTAVA H M,TRUJILLO J J.Theory and Applications of Fractional Differential E-quations[M]. Amsterdam:Elsevier,2006:69-132.
[6] ALLAHVIRANLOO T.Fuzzy Fractional Differential Operators and Equations:Fuzzy Fractional Differential Equations[M]. Berlin:Springer Nature,2020.
[7] GOMES L T,BARROS L C.A Note on the Generalized Difference and the Generalized Differentiability[J]. Fuzzy Sets and Systems,2015,280:142-145.
[8] STEFANINI L,BEDE B.Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-valued Functions and Interval Differential Equations[J]. Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2009,71(03-04):1311-1328.
[9] 丁玮麒,顾海波.Hilfer-Katugampola分数阶模糊Volterra-Fredholm型非局部问题[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2023,42(03):13-25.
[10] VAN H N,HO V.A Survey on the Initial Value Problems of Fuzzy Implicit Fractional Differential Equations [J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,400:90-133.
[11] 席艳丽,陈鹏玉.隐式分数阶模糊微分方程初值问题解的唯一性[J].山东大学学报(理学版),2022,57(04):85-90.
[12] CHEN X,GU H,WANG X. Existence and Uniqueness for Fuzzy Differential Equation with Hilfer-Katugampola Fractional Derivative[J].Advances in Difference Equations,2020,(01):1-16.
[13] ZADEH L A.Fuzzy Sets[J].Information & Control,1965,8(03):338-353.
[14] NEGOITA C V,RALESCU D A.Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis[M].Basel:Birkhauser,1975.
[15] VU H,VAN H N.Hyers-Ulam Stability of Fuzzy Fractional Volterra Integral Equations with the Kernel ψ- Function Via Successive Approximation Method[J].Fuzzy Sets and Systems,2021,419:67-98.
[16] ROMAN-FLORES H,ROJAS-MEDAR M. Embedding of Level-continuous Fuzzy Sets on Banach Spaces[J]. Information Sciences,2002,144(01-04):227-247.
[17] YANG M,WANG Q R.Approximate Controllability of Fractional Differential Inclusions[J].Mathematical Methods in the Applied Sciences,2016,40(04):1126-1138.
[18] ULAM SM.A Collection of Mathematical Problem[M]. New York:Interscience,1960.
[19] PHIL D,KLOEDEN P.Metric Spaces of Fuzzy Sets:Theory and Applications[J].World Scientific,1994,(100):63-71.
[20] BEDE B, STEFANINI L. Generalized Differentiability of Fuzzy-valued Functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 230:119-141.
[21] KATUGAMPOLA U N.A New Approach to Generalized Fractional Derivatives[J].Bulletin of Mathematical Analysis and Applications,2014,6(04):1-15.
[22] VAN H N,LUPULESCU V,O'REGAD D.A Note on Initial Value Problems for Fractional Fuzzy Differential Equations[J].Fuzzy Sets and Systems,2018,347:54-69.

Existence and Uniqueness of Solutions for Hilfer-Katugampola Type Fuzzy Implicit Fractional Differantial Equations

PALIDAN·Wusiman,GU Hai-bo*

(*College of Mathematical Sciences,Xinjiang Normal University,Urumqi,Xinjiang,830017,China*)

Abstract:In this paper,the Hilfer-Katugampola type implicit fractional order fuzzy problem with non-local conditions is studied. By using Schauder's fixed point theorem and Banach contraction principle,the exictence and uniqueness conditions of solutions are given.

Keywords:Fuzzy differential equations;Hilfer-Katugampola fractional derivative;Fixed point theorem;Existence and uniqueness of the solution